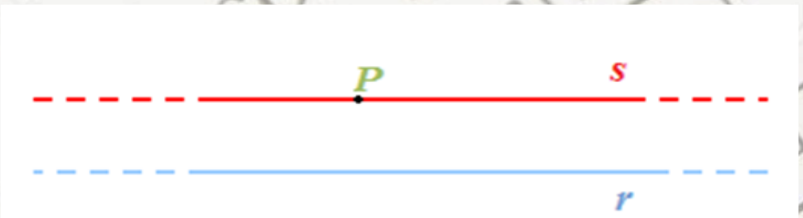
GEOMETRIA EUCLIDEA

La geometria euclidea è una parte rilevante della geometria che prende il nome dal matematico alessandrino Euclide , vissuto nel terzo secolo a.C.

I 5 postulati:

- *1 Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta*
- *2 Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente*
- *3 Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio*
- *4 Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro*
- *5 Data una RETTA r ed un punto P esterno ad essa, esiste una sola retta s parallela ad r e contenente P*



Sulla violazione di questi postulati, e soprattutto sul quinto, si fondano le geometrie non euclidee.

Discussioni sul quinto postulato

Fin dalla sua nascita è stato difficile dimostrare matematicamente la veridicità del postulato delle rette parallele, esso possiede varie formulazioni equivalenti:

- **Data una retta r ed un punto P che non le appartenga, esiste un'unica retta s passante per P e ad essa parallela.**
- **Se due linee sono tagliate da una trasversale in modo tale che la somma degli angoli interni da una parte della trasversale è minore di 180°, allora le due linee s'intersecano dalla stessa parte della trasversale.**
- **La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.**

Geometrie Non Euclidee

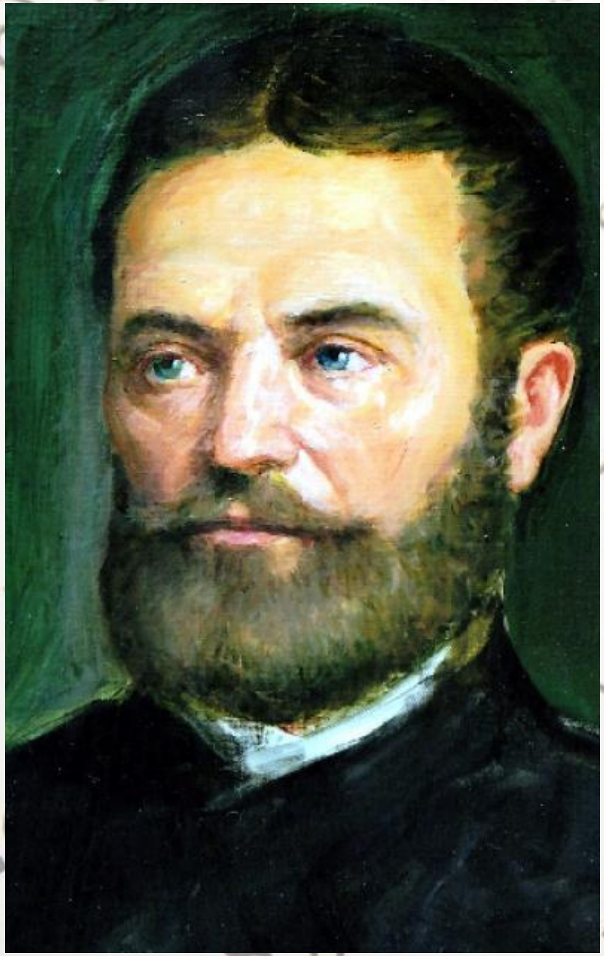
Dalla negazione del quinto postulato nacquero Geometrie Non Euclidee, che, dal punto di vista della logica matematica, sono equivalenti alla Geometria Euclidea nel senso che ciascuna di esse è consistente se e solo se lo è la geometria Euclidea.

Due esempi sono la geometria iperbolica (**Bolyai**, **Gauss**, **Lobachevsky**) e la geometria ellittica (**Gauss**, **Riemann**).

I fondatori

GAUSS: Fu Gauss il primo grande matematico a riconoscere chiaramente la possibilità della nuova geometria, ma comunque non pubblicò mai nulla su questo argomento. Dalla sua corrispondenza con altri matematici è possibile, però, ricostruire le sue ricerche. "Sono stato indotto di recente a rivedere l'opuscolo di Lobacevskij [...]. Contiene i fondamenti di quella geometria che dovrebbe, e a rigore potrebbe, aver luogo se la geometria euclidea non fosse la vera. Un certo Schweikart la chiamò geometria astrale. Lobacevskij geometria immaginaria. Lei sa che già da 54 anni ho le stesse convinzioni. Materialmente non ho trovato nulla di nuovo nell'opera di Lobacevskij, ma lo sviluppo è fatto per una via diversa da quella che ho seguito io. "

Lobacevskij : *Lobacevskij pubblicò nel 1829 delle memorie in cui mostrava i risultati riguardanti la nuova geometria. In un secondo momento introduce i concetti di retta e di piano e dimostra per essi le proprietà geometriche che si possono ricavare senza l'uso del V postulato euclideo. Ottiene risultati interessanti, come ad esempio l'aver dimostrato l'assoluta indipendenza della geometria sferica dal V postulato e dimostra l'esistenza dei cinque poliedri regolari ottenuta senza ricorso a considerazioni sulle rette parallele. Successivamente, introduce una nuova nozione di rette parallele e procede nello sviluppo della geometria immaginaria.*



Bolyai: *si applicò nella direzione della geometria assoluta, giungendo alla importante formula dell'angolo di parallelismo. Le opere di Bolyai non ebbero immediata risonanza nel mondo matematico del tempo.La scoperta di questo nuovo sistema si può attribuire al matematico tedesco Riemann. JànosBolyai, figlio di Wolfgang FarkasBolyai (1775-1856), era un ufficiale ungherese. Sulla Geometria non Euclidea, che chiamava Geometria Assoluta, scrisse un lavoro di ventisei pagine intitolato La scienza dello spazio assoluto. Anche se quest'opera in due volumi apparve nel 1832-33, e quindi dopo il primo lavoro di Lobachevsky, sembra che Bolyai abbia elaborato le sue idee sulla Geometria non Euclidea prima del 1825 e che entro quel periodo si fosse convinto che la nuova geometria non era contraddittoria. In una lettera al padre datata 23 Novembre 1823 Jànos scrive: "Ho fatto delle scoperte così meravigliose che sono io stesso sconvolto per lo stupore".*

REIMANN: *Dubbi intorno alla geometria dello spazio fisico sollevati dalle ricerche di Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856) e JànosBolyai (1812-1860), portarono a una delle maggiori creazioni del XIX secolo, la geometria riemanniana. Il suo creatore fu Georg Bernhard Riemann (1826-1866).*

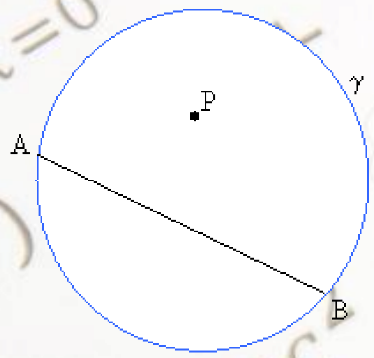
La geometria dello spazio presentata da Riemann non era soltanto un'estensione della geometria di Gauss. Essa riconsiderava l'intero approccio allo studio dello spazio. Riemann affrontò il problema di determinare quali sono i fatti concernenti lo spazio fisico intorno ai quali possiamo essere certi. Uno degli obiettivi di Riemann era quello di dimostrare che i Postulati di Euclide erano verità empiriche e non, come si era creduto, verità di per sé evidenti.

Egli adottò l'approccio analitico perché nelle dimostrazioni geometriche si può essere indotti dalle proprie percezioni ad assumere erroneamente dei fatti non riconosciuti esplicitamente.

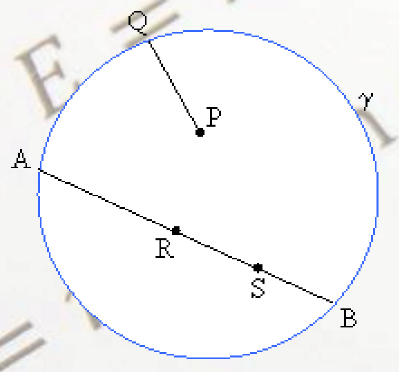
La geometria iperbolica.

Modello di Klein:

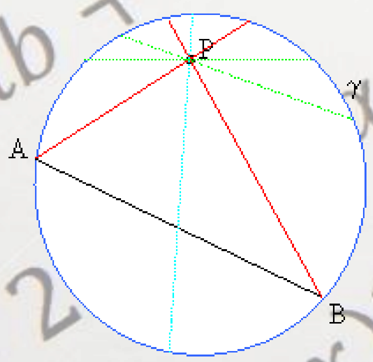
La geometria iperbolica è una geometria che ammette che per un punto passano due parallele ad una retta data. Il termine IPERBOLICO, che in greco significa "eccesso", vuole ricordare che vi è un eccesso di parallele rispetto a ciò che si era considerato in precedenza.Il matematico tedesco F. Klein propose un modello di geometria iperbolica in cui gli enti geometrici fondamentali punto e retta soddisfano tutti gli assiomi della geometria euclidea, tranne quello delle parallele.



- Il "piano" corrisponde ai punti interni alla circonferenza γ;
- P è il generico punto del piano;
- la corda AB, privata degli estremi, corrisponde a una "retta".



- La parte di "retta" RS è un "segmento";
- PQ (Q escluso) è una "semiretta";
- la "retta" AB suddivide il "piano" in due "semipiani".



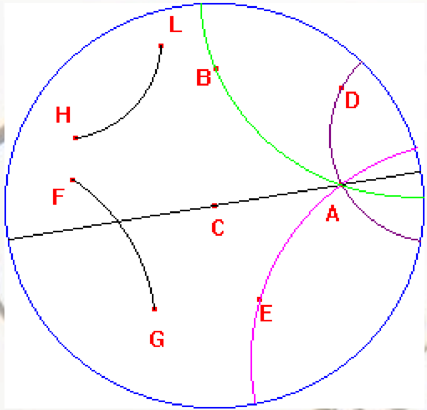
- Punti e rette così definiti soddisfano numerosi assiomi, ma non il postulato delle parallele: per il punto P esterno alla retta AB passano "rette" che intersecano la "retta" AB, per es. la "retta" azzurra in figura, che è detta **incidente**, e "rette" che non la intersecano (per es. quelle in verde). Le due "rette" in rosso, che separano le "rette" che incidenti da quelle che non intersecano AB, sono le **parallele** ad AB passanti per P (infatti A e B non appartengono al piano di Klein).
  Rette come quelle in verde sono dette **ultraparallele**.

Modello di Poincaré:

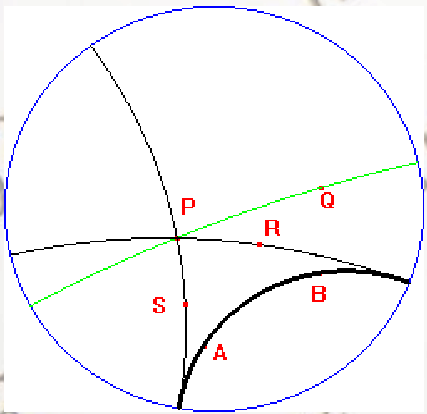
Il modello di Poincaré è un pochino più complesso di quello di Klein, ma molto istruttivo. Si tratta di un modello di geometria iperbolica in cui l'idea di punto è simile a quanto conosciamo nella geometria di Euclide, mentre quella di retta è sostanzialmente diversa. La cosa comunque importante è costituita dal fatto che non vale il postulato delle parallele nella forma di Euclide.

- Consideriamo un cerchio, che indichiamo con *K*, e diamo le seguenti definizioni:
- Punto è un punto *interno* (sono cioè esclusi i punti sul bordo).
- Retta è ogni diametro, *privato degli estremi*, oppure ogni arco di circonferenza, interno al cerchio *K* e con estremi sullo stesso, ma sempre *privato degli estremi*, ed ortogonale alla circonferenza che lo delimita (due cerchi si dicono ortogonali se le loro tangenti nei punti di intersezione sono ortogonali).
- Piano è l'insieme di tutti i punti *interni*.

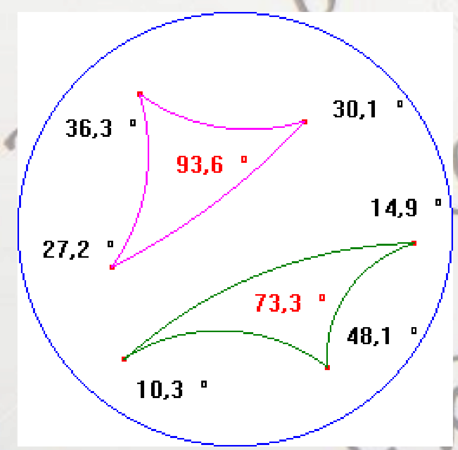
In questo modello l'angolo tra due "semirette" è definito in maniera identica a quanto si fa nella geometria usuale, prendendo in considerazione gli angoli fra le tangenti agli archi di cerchio nei loro punti di intersezione. La distanza tra due punti è definita in modo simile a quanto si fa nel modello di Klein, con qualche difficoltà legata al fatto che i "segmenti" e le "rette" sono, in genere, archi di cerchio. E' interessante il fatto che i cerchi hanno lo stesso aspetto che hanno nella geometria euclidea, tranne per la posizione del centro.



In questa immagine sono rappresentate quattro rette, passanti per un stesso punto *A* (*AC, AE, AD, AB*) e due segmenti (*HL* ed*FG*). Delle quattro rette una è un diametro, le altre tre sono archi di cerchio.



In questa immagine sono rappresentate: una retta *AB*, le due parallele passanti per un punto *P* (*PS* e *PR*) ed un'altra retta, *PQ*, non secante *AB*: anche quest'ultima potrebbe essere considerata parallela ad *AB*(infatti non la interseca), ma si preferisce riservare questo nome solo alle due rette "estreme", *PS* e *PR*. Le rette dello stesso tipo di *PQ* si dicono ultraparellele.



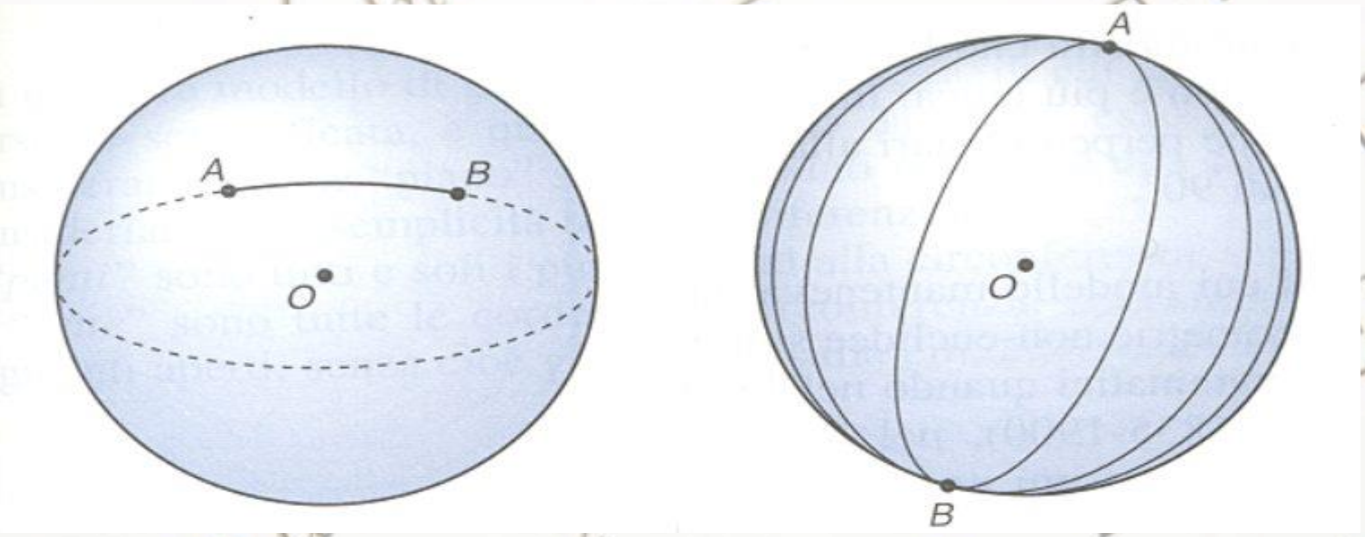
Due triangoli con la misura dei loro angoli interni e la misura della somma: come è caratteristico di questa geometria, la somma è sempre minore di 180° ed è variabile da triangolo a triangolo.

IL CASO ELLITTICO:

Questo caso è quello di cui si occupa Riemann ed è fondato essenzialmente sull'ipotesi che la retta sia chiusa e finita. Il modello che Riemann propone è il seguente:

- *Il piano è costituito da una superficie chiusa (per comodità potremmo pensare ad una superficie sferica)*
- *I punti sono i punti su di essa*
- *Le rette per due punti sono i cerchi massimi passanti per essi*

É evidente che in questo modello non esistono rette parallele.



In tale contesto Riemann definisce la linea di minima distanza tra due punti la **geodetica**, cioè l'arco minore di circonferenza che passa per i due punti ed ha il centro nel centro della sfera.

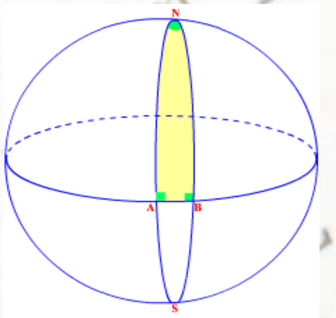
Oltre a non avere rette parallele, si può dimostrare che:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di una angolo piatto
- non esistono triangoli simili, salvo quando sono anche congruenti
- tutte le perpendicolari ad una "retta" passano per una medesima coppia di punti, che sono diametralmente opposti.

Relazione del 6/03/2017

Per rappresentare in modo pratico un modello di geometria ellittica, abbiamo effettuato un esperimento.

MATERIALI:



- *Pallone*
- *Metro da sarta*
- *Scotch*
- *Pennarello*
- *Lucido*
- *Goniometro*

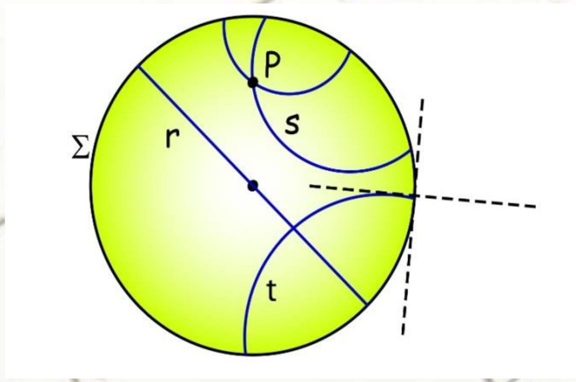
SVOLGIMENTO

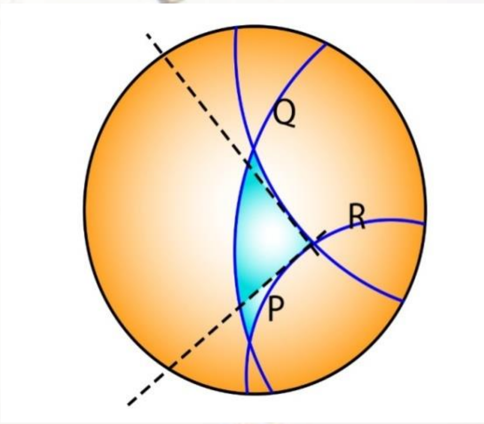
Abbiamo applicato su un pallone un metro da sarta, in modo da ottenere una circonferenza massima. Ci siamo accorti che non era possibile far aderire il metro lungo percorsi che non erano archi geodetici, cioè su circonferenze minori. Abbiamo così costruito un triangolo sferico sul pallone, e tracciato i suoi angoli su un lucido. Verificando i valori degli angoli con il goniometro, le misure di questi risultavano tali che la somma fosse maggiore di 180°. Ognuno ha ricavato diversi valori, i quali variavano a seconda delle dimensioni del triangolo rappresentato. Nonostante ciò la conclusione era sempre la stessa.

DISCO DI POINCARE

MATERIALI:

- *Foglio bianco*
- *Forbici*
- *Scotch*



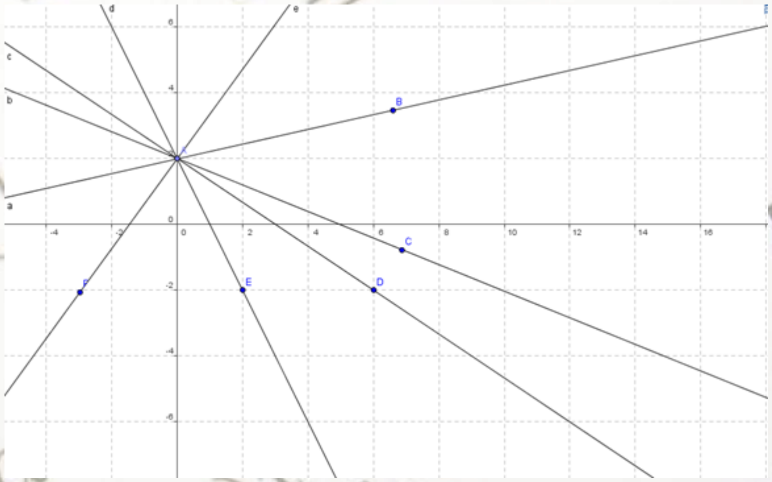


SVOLGIMENTO

Utilizzando un foglio di carta bianco , abbiamo disegnato un cerchio e un settore circolare; e successivamente ritagliati entrambi. Il cerchio è stato tagliato lungo il suo raggio, in modo da presentare una fessura. Abbiamo inserito nella fessura il settore e l'abbiamo fissato ai bordi della fessura con del nastro adesivo. Questa operazione è possibile solo se lasciamo flettere la superficie nella terza dimensione. Otteniamo una superficie a sella.

ESPERIMENTO FASCIO DI RETTE

MATERIALI:



- *Cartellone*
- *Pennarello*

SVOLGIMENTO

Preso un cartellone abbiamo disegnato un fascio di rette passante per il punto P con la riga da 60cm ; successivamente abbiamo unito i margini del cartellone , in modo da ottenere un cilindro. A questo punto abbiamo notato come le rette del fascio disegnate si siano incontrate ai lembi del cartellone.

Giulia Forina
Giorgia Dellosso
Martina Presicci
Elisa Musio
Giovanni Oliva
Giulia Presicci
Alessandra Cavallo
Lucrezia Di Giuseppe